TEOREMA GENERAL
DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME

I. Classificació general dels recintes

Els recintes simplement conexos de diverses o infinites fulles es classifiquen en dos grups:

a) Recintes *tancats*, això és, recintes d'un nombre infinit de fulles indefinides, que contenen el punt de l'infinit, els quals es poden deformar aplicant-los damunt l'esfera completa. Una retrosecció qualsevol els divideix en dos recintes parcials. Els recintes d'aquest tipus són les superficies de Riemann de les funcions algèbriques de gènere zero.

b) Recintes *oberts* de diverses o infinites fulles, amb nombre finit o infinit de punts de ramificació, d'ordres finits o infinits; aplicables per deformació damunt l'esfera puntejada o damunt un casquet. Un exemple de tals recintes l'ofereix la superficie de Riemann de la funció $log\ z$, exclosos els punts o i ∞.

La possibilitat de la representació conforme damunt l'esfera completa, o damunt el pla complet, d'un recinte tancat, s'obté fàcilment pel mètode alternat, o també suprimint un punt del recinte, amb la qual cosa es transforma en recinte obert; i efectuada la representació de aquest damunt del pla incomplet (o sigui l'esfera puntejada) com veurem més endavant, la funció obtinguda és també analítica i regular en el punt exclòs, en virtut del teorema de Riemann (*), i efectúa, per tant, la representació del recinte complet damunt del pla complet.

Ens caldrà només, doncs, considerar els recintes oberts, únics en que el problema presenta dificultat.

2. Successions convergents de recintes

Donat un recinte obert G simplement conex, i un punt interior O, és possible construir una successió indefinida de recintes simplement convexos G_1, G_2, G_3..., limitats per curves analítiques, que convergeixin cap a dit recinte G. En termes més precisos, aquests recintes han de complir les condicions següents:

1.ª Tots estàn continguts en G i contenen O en llur interior.

2.ª G_n està contingut en G_{n+1}, o sigui $G_n \prec G_{n+1}$.

3.ª Tot punt de G está contingut en G_n des d'un valor de n en endavant.

Aquestes tres condicions seràn expressades abreujadament escrivint:

$$\lim_{n \to \infty} G_n = G.$$

Un mètode senzill per a construir aquesta successió és el següent, de Koebe: Prenem un quadrat de costat a i centre O contingut en G; i construim tots els quadrats adjacents de costat $\frac{a}{2}$, continguts en G, i que compleixin

(*) *Teorema de Riemann.* Si $f(z)$ és analítica en un entorn del punt $z=a$, exceptat el mateix punt a, i es conserva finita en tal recinte, té $f(z)$ un límit finit α per a $z \to a$. Si s'assigna aquest valor al punt a, posant $f(a) = \alpha$, la funció així completada és analítica en el punt z. Per la demostració vegis a Osgood, pàg. 310. *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig, 1912.

la condició que es pugui unir qualsevol punt de O amb qualsevol punt de la xarxa construida per mitjà d'una linia de longitut no superior a a.

Subdividits els quadrats en quatre parts, construim els quadrats adjacents de costat $\frac{a}{4}$, continguts en G, els punts dels quals siguin accessibles desde A per camins de longitut no superior a $2a$. Seguint així construim una xarxa de quadrats de costats $\frac{a}{2^n}$, continguts en G, els punts dels quals són tots accessibles des de O per camins de longitut $\overline{\gtreqless} na$.

Si en la construcció de quadrats successius evitem cobrir els punts de ramificacions, el resultat G'_n obtingut no serà, en general, simplement conex, però afegint-li els recintes parcials limitats per les linies trencades interiors que contingui, obtenim un recinte simplement conex $G_n \succ G'_n$.

Els recintes G_n compleixen a primera vista les condicions 1.ª i 2.ª. Ultra això, qualsevol punt A de G pot ésser unit amb O per una trencada (per la conexió de G) i sense altra cosa que pendre n prou gran perquè na sigui major que la longitut d'aquesta, i $\frac{a}{2^n}$ petit a bastament, queda A contingut en G'_n i per tant en G_n.

3. Cas A. — La successió de radis és convergent

1.ª part. Limitació.

Sigui g un recinte contornejat qualsevol interior a G. Cada punt de g està en G_n d'un cert valor de n en endavant; a cada punt z_0 correspòn un valor n_0 de l'índex que compleix aquesta condició, i aplicant el teorema de Borel obtenim un valor únic ν tal que tot el recinte g està contingut en G_ν, $G_{\nu+1}$ . . . .

Siguin $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_n(z)$ . . . les funcions que efectúen la representació conforme de G_1, G_2 . . . . G_n . . . . damunt de C_w corresponent-se els origens i les direccions reals. La funció $f_{n+p}(z)$ transforma $G_n \prec G_{n+p}$ en un recinte $G'_n \prec C_w$; i la funció $f_n(z)$ transforma aquest mateix G_n en C_w; serà, doncs, pel lema de Schwarz en tot el recinte G_n:

$$|f_{n+p}(z)| < |f_n(z)|$$

La funció $f_\nu(z)$ transforma g en cert recinte interior a C_w; existeix, doncs, un número λ tal que en tots els punts de g serà

$$|f_\nu(z)| < \lambda < 1$$

i per tant:

$$|f_n(z)| < \lambda < 1$$

per a tots els punts de g, ip er a tots els índexs $n \geqq \nu$.

2.ª *part. Convergencia.*

La funció $f_{n+p}(z)$ transforma G_{n+p} en C_w i $G_n \prec G_{n+p}$ en $G'_n \prec C_w$; entre els radis d'aquests quatre recintes en el punt O existirà (Conf. II § 1, ap. 2) la relació

$$\frac{\rho'}{1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n+p}}$$

i com que, en virtut de lo dit en el § 3 de la Conf. IV, anomenant h_n la distancia de O al contorn de G'_n és

$$\rho'_n < \frac{2\sqrt{h_n}}{1+h_n},$$

tenim:

$$\frac{\rho_n}{\rho_{n+p}} < \frac{2\sqrt{h_n}}{1+h_n} < 1$$

i essent

$$\lim_{n \gg \infty} \rho_n = \lim_{n \gg \infty} \rho_{n+p} = \rho,$$

resulta:

$$\lim_{n \gg \infty} h_n = 1;$$

prenent, doncs, n gran a bastament serà

$$\lambda < \sqrt{\lambda} \leqq h_n < 1.$$

Com que les funcions $f_n(z)$, $f_{n+p}(z)$ transformen G^n en C_w i G'_n respectivament, tenim entre aquests una representació conforme i aplicada a ells la limitació de Carathéodory per a $\tau = \sqrt{\lambda}$ serà $h_n \tau \geqq \lambda$; per tant

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

per a $n \geqq N$ i p qualsevol en tot el recinte g. La successió, doncs, convergeix uniformement en tot recinte constant interior a G i pel teorema de Weierstrass (Conf. **I** § 6) defineix una funció límit $f(z)$ analitica en tot punt de G.

Observi's que per ésser $f'_n(o) = \frac{1}{\rho_n}$ és $f'(o) = \frac{1}{\rho} \neq o$, i per tant, $f(z)$ no és una constant.

3.ª *part. Representació.*

Tot punt z_o de G, queda comprès en G_n des d'un cert valor de n; i com que les funcions $f_n(z)$ són uniformes, defineix $f(z_o)$ un punt únic. Per ésser $|f_n(z_o)| < \lambda < 1$ resulten sempre punts interiors a C_w.

Si w_o és un punt qualsevol interior a C_w, per ésser $\lim h_n = 1$, des d'un cert valer $n = v$ serà

$$|w_o| < h_n < 1 \qquad n \geqq v$$

qualsevol que sigui h; per tant, l'homòleg de w_o en la transformació de $G_{\nu+p}$ damunt G_w efectuada per $f_{\nu+p}(\tau)$, està dins de G_ν, i l'equació

$$f_n(z)=w_o, \qquad n\overline{\overline{>}}\nu$$

té una arrel z_o dins de G_ν. Essent aquest un recinte contornejat interior a G es pot aplicar el teorema de Hurwitz (Conf. V § 4), i l'equació $f(z)=w_o$ tindrà també una sola arrel dins de G_ν. Hi ha, doncs, un homòleg z_o de w_o en G, i aquest és únic, puix si en tingués un altre z_1, prenent v gran a bastament quedaríen ambdós dins d'ell, contra la conclusió anterior.

En resum: la funció $f(z)$ efectúa la representació biunívoca, continua i conforme de l'interior de G damunt l'interior de C_w.

4. Nou teorema de limitació

Hem resolt el cas A basant-nos en el teorema de limitació de Carathéodory. Per a escometre per un mètode anàleg el cas B en què lim $\rho_n=\infty$ per $n\longrightarrow\infty$, anem a establir un nou teorema d'una mena semblant al de Carathéodory.

Donat un recinte qualsevol G_z simplement conex d'una fulla, que conté en son interior el cercle $|z|\overline{\overline{<}}H$ de centre O i radi H, si $w=f(z)$ és una funció qualsevol analítica i regular en G_z, que compleix les úniques condicions:

$$f(o)=0 \qquad |f'(o)|=1,$$

es verifica:

1.er *Fixat un cercle* $|z|\overline{\overline{<}}h<H$ *interior a H, per a tots els valors de z continguts en ell és:*

$$|w-z|<m$$

essent m *un número positiu que sols depèn de h i H però no de* f(z).

2.^{ón} *Fixat h, és* lim $m=0$, per a $H \rightarrow \infty$.

Pel teorema de Taylor-Cauchy (Conf. 1.^{a}) és:

$$w = z + z^2 P$$

estant P expressat en tot punt del cercle $C_{\varkappa H}$ ($\varkappa < 1$) per la integral:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa H} \frac{f(t)\, dt}{t^2 (t - z)}$$

presa al llarg de la circumferencia $\varkappa H$ en sentit positiu. Però en aquesta circumferencia és: $|t| = \varkappa H$, i en virtut del teorema III de Koebe (Conf. 4.^{a} § 4) és:

$$|f(t)| \leqq KH.$$

Si considerem, doncs, el valors de P solament en el cercle C_h, en el qual és:

$$|z| \leqq h, \qquad |t - z| \geqq \varkappa H - h,$$

tenim:

$$|P| \leqq \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f(t)|\,|dt|}{|t|^2\,|t - z|} \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{KH}{\varkappa^2 H^2 \cdot (\varkappa H - h)} \int_{\varkappa H} |dt| = \frac{K}{\varkappa\,(\varkappa H - h)}$$

per tant, en tot el cercle C_h és:

$$|w - z| = |z|^2\,|P| \leqq \frac{K h^2}{\varkappa(\varkappa H - h)}.$$

Qualsevol que siguin $h < H$ es pot trobar el nombre fix $\varkappa < 1$ sense cap més condició que la $h < \varkappa H < H$ i la limitació anterior es verifica qualsevol que sigui $f(z)$ sense altra condició que la $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Fixat h, si H creix indefinidament, conservant-se fixos $\varkappa$ i K resulta:

$$|w - z| < \varepsilon$$

de cert valor de H en endavant, essent ε tant petit com se vulgui.

BIBLIOGRAFÍA (*)

LLIBRES

H. A. SCHWARZ. — *Gesammelte Abhandlungen*, v. 1.er, Berlín.

W. F. OSGOOD. — *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2.a ed. v. 1.er, Leipzig, 1912.

L. LEWENT. — *Konforme Abbildung*, Berlín, 1912.

ESTUDY. — *Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche*, Berlín, 1913.

L. BIEBERBACH. — *Einführung in die konforme Abbildung*, Berlín-Leipzig, 1915. (**)

(*) La bibliografía completa (Memories) es podrá veure en una extensa ressenya de la teoría de la representació conforme que publicarem aviat.

(**) Publicat desprès de les nostres conferencies, no ha arribat el llibre a les nostres mans.